Trường :THCS – THPT Lạc Hồng   **Tổ :Toán - Tin**

Chuyên đề .

Phương pháp so sánh nghiệm của pt lượng giác với điều kiện của nó mà không cần vẽ đường tròn lượng giác.

Mở đầu : Đây chỉ là một phương pháp dùng máy tính cầm tay để tìm giá trị **nguyên** của phần tử **m**.

Bản chất của phương pháp này thực chất cũng là biễu diễn các tập hợp cung tìm được khi giải phương trình lượng giác trên đường tròn lượng giác nhằm tìm các điểm trùng với các điểm biểu diễn của **điều kiện** của phương trình lượng giác để loại đi nhưng không vẽ đường tròn lượng giác. Do đó, ta chỉ xem đây là một cách tiếp cận khác mà thôi.

Nội dung

Giả sử $X = \alpha_1 + k\beta_1, k \in Z$ và $Y = \alpha_2 + m\beta_2, m \in Z$ lần lượt là tập hợp cung tìm được khi giải phương trình lượng giác và **điều kiện** của phương trình.

Xét phương trình $X = Y \Leftrightarrow \alpha_1 + k\beta_1 = \alpha_2 + m\beta_2 \Rightarrow m = \dfrac{\alpha_1 - \alpha_2 + k\beta_1}{\beta_2}$ **(1)**

Cố định k = 0, 1, 2,… thế vào (1) ta tìm được m. Chú ý, k phải chạy hết chu kì biễu diễn điểm của X trên đường tròn lượng giác. Nếu m có giá trị nguyên thì khi đó điểm biểu diễn của X và Y trùng nhau.

Đây là công thức tổng quát dùng để loại nghiệm của phương trình lượng giác mà không cần vẽ đường tròn lượng giác.

Ví dụ1. Giả sử pt $\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x - 1} = 0$ có ĐK $x \neq \dfrac{m2\pi}{3}, m \in Z$. Pt tương đương với $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{3}, k \in Z$.

Theo công thức (1) ta có $m = \dfrac{k}{2}$.Cho k = 0,1,2,3,4,5 ta tìm được $m \in Z$ khi k = 0,2,4 ứng với các điểm có cung như sau : $0, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$. suy ra $k = 2m, m \in Z$ thì không thỏa điều kiện Vậy nghiệm của pt là : $x = \dfrac{k\pi}{3}, k \in Z$ và $k \neq 2m, m \in Z$.

Ví dụ2. Xét pt $\cot 2x \cot 4x = 1$, ĐK $x \neq \dfrac{m\pi}{4}, m \in Z$. Pt tương đương với $\cot 4x = \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{6}, k \in Z$.

Áp dụng công thức (1) ta có $m=\frac{2k+1}{3}$.Cho k = 0,1,2,…11 ta tìm được $m\in Z$ khi k = 1,4,7,10 ứng với các điểm có cung như sau : $\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6},.\frac{5\pi}{3},\frac{13\pi}{6}$, suy ra $k=1+3t,t\in Z$ thì không thỏa điều kiện. Vậy nghiệm của pt là :

$x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{6},m\in Z$ và $k\neq 1+3t,t\in Z$.

<u>Ví dụ3.</u> Xét pt $\frac{-2\sin^4 x+3\cos 2x\cos^2 x+\sin^2 x}{1+\tan x}=0$, ĐK $\begin{cases} x\neq -\frac{\pi}{4}+m\pi,m\in Z \\ x\neq \frac{\pi}{2}+n\pi,n\in Z \end{cases}$. Pt tương đương với

$$-2\sin^4 x+3\cos 2x\cos^2 x+\sin^2 x=0\Leftrightarrow \left(1-2\sin^2 x\right)\sin^2 x+3\cos 2x\cos^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\sin^2 x+3\cos 2x\cos^2 x=0 .\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin^2 x+3\cos^2 x\right)=0\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in Z$$

Áp dụng công thức (1) ta có $\begin{cases} m=\frac{k+1}{2} \\ n=\frac{2k-1}{4} \end{cases}$.Cho k = 0,1,2.3 ta tìm được $m\in Z$ khi k = 1,3 ứng với các điểm có cung như sau : $\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4}$ và $n\notin Z,\forall k\in Z$.Vậy nghiệm của pt là : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$.

<u>Ví dụ 4.</u> Xét pt $\frac{1}{\cot 2x+\tan x}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos x-\sin x\right)}{\cot x-1}$, ĐK $\begin{cases} \sin x\cos x\neq 0 \\ \cot x\neq 1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \frac{m\pi}{2},m\in Z \\ x\neq \frac{\pi}{4}+n\pi,n\in Z \end{cases}$.

Pt tương đương

$$\frac{1}{\frac{\cos 2x}{\sin 2x}+\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos x-\sin x\right)}{\frac{\cos x}{\sin x}-1}\Leftrightarrow \frac{\sin 2x\cos x}{\cos x}=\sqrt{2}\sin x .\Leftrightarrow \left(\sin 2x-\sqrt{2}\sin x\right)\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos x-\sqrt{2}\right)\sin x\cos x=0\Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.,k\in Z$$

Loại nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$,xét nghiệm $x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi$.Áp dụng công thức (1) ta có $\begin{cases} m=4k-\frac{1}{2} \\ n=2k-\frac{1}{2} \end{cases}$.Cho k = 0, ta thấy $m,n\notin Z$ suy ra luôn thỏa điều kiện. Vậy nghiệm của pt là : $x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in Z$.

<u>Ví dụ 5.</u> Xét pt $\frac{\sin^2 x-2}{\sin^2 x-4\cos^2\frac{x}{2}}=\tan^2\frac{x}{2}$,

ĐK $\begin{cases} \cos\frac{x}{2}\neq 0 \\ \sin^2 x-4\cos^2\frac{x}{2}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x\neq -1 \\ -(\cos x+1)^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x\neq -1 \Leftrightarrow x\neq \pi+m2\pi, m\in Z$.

Pt tương đương

$$\frac{1+\cos^2 x}{(\cos x+1)^2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.\Leftrightarrow \frac{1+\cos^2 x}{\cos x+1}=1-\cos x$$

$$\Leftrightarrow 1+\cos^2 x=1-\cos^2 x \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$$

.Áp dụng công thức (1) ta có $2m=k-\frac{1}{2}\notin Z,\forall k\in Z$, suy ra luôn thỏa điều kiện. Vậy nghiệm của pt là : $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$.

<u>Ví dụ 6.</u> Pt $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$,

ĐK: $\begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0 \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0 \end{cases}. \Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -\frac{\pi}{3}+m\frac{\pi}{2},m\in Z$

Khi đó pt $\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{7}{8}\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{7}{8}$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{7}{8}\Leftrightarrow \cos 4x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$$

Áp dụng công thức (1) ta có $\begin{cases} m = k + \dfrac{10}{12} \notin Z \\ m = k + \dfrac{1}{2} \notin Z \end{cases}$, , $\forall k \in Z$. Vậy nghiệm của pt là : $x = \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in Z$.

Trên đây là một số ví dụ dùng phương pháp không sử dụng đường tròn lượng giác để tìm nghiệm của phương trình lượng giác mà tôi muốn giới thiệu tới đọc giả. Mỗi phương pháp có những thú vị riêng của nó! Mong đọc giả hãy cố gắng đọc và phản biện.

Chú ý. Đối với những tập hợp cung có điểm biểu diễn nhiều thì dùng phương pháp này khả thi hơn, nhưng đối với những tập hợp cung có điểm biểu diễn ít thì dùng đường tròn lượng giác nhanh hơn.

TP.HCM, 31- 07 - 2017

Người viết : Nguyễn Thanh Hải