CHƯƠNG 2
PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. VECTƠ PHÁP TUYẾN (HAY PHÁP VECTƠ) CỦA MẶT PHẲNG

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là vtpt của mặt phẳng α nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc mặt phẳng α.

Vtpt của mp α thường ký hiệu là $\vec{n}_\alpha$

Nếu $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng α thì k.$\vec{n}$ (k≠0) cũng là vtpt của mặt phẳng α.

Cho 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{o}$ và không cùng phương.

Nếu giá của $\vec{a}, \vec{b}$ song song hoặc nằm trên mặt phẳng α thì $\vec{n}$ = $[\vec{a}, \vec{b}]$ là một vtpt của mp α.

II. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

$$Ax + By + Cz + D = 0 \, (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

Phương trình mặt phẳng qua điểm $M(x_o,y_o,z_o)$ và có vtpt $\vec{n}$ = (A,B,C) là:

$$A(x-x_o) + B(y-y_o) + C(z-z_o) = 0$$

Nếu mặt phẳng α cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c) (a,b,c≠0) thì α có phương trình:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \qquad (1)$$

Ta gọi phương trình (1) là *phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn*.

Trường hợp đặc biệt:

1) Cho mặt phẳng α : Ax + By + Cz + D = 0

. α qua gốc O ⇔ D = 0

. α // Ox ⇔ A = 0 và D $\neq$ 0.

. α qua (chứa) Ox ⇔ A = D = 0

. α // (Oxy) ⇔ A = B = 0 và D $\neq$ 0

Các trường hợp α //Oy; α //Oz; α qua Oy; α qua Oz; α // (Oxz); α // (Oyz) được suy ra tương tự.

2) Phương trình các mặt phẳng tọa độ:

. (Oxy): z = 0

. (Oxz): y = 0

. (Oyz): x = 0

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI MẶT PHẲNG:

Cho 2 mặt phẳng :

α : Ax + By +Cz + D = 0 $\quad (\vec{n}_{\alpha} = (A,B,C))$

α ':A'x + B'y + C'z + D' = 0 $\quad (\vec{n}_{\alpha'} = (A',B',C'))$

1) α cắt α ' ⇔ A:B:C $\neq$ A':B':C' ⇔ $[\vec{n}_{\alpha}, \vec{n}_{\alpha'}] \neq \vec{0}$

(Ký hiệu A:B:C = A':B':C' ⇔ $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$)

2) α // α ' ⇔ $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$

3) $\alpha \equiv \alpha$ ' ⇔ $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$

4) $\alpha \perp \alpha$ ' ⇔ $\vec{n}_{\alpha} . \vec{n}_{\alpha'} = 0$ ⇔ AA' + BB' +CC' = 0

IV. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Khoảng cách từ điểm $M(x_o,y_o,z_o)$ đến mặt phẳng α :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$d(M, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Trường hợp đặc biệt:

Khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng tọa độ:

$d(M,(Oxy)) = |z_o|$

$d(M,(Oxz)) = |y_o|$

$d(M,(Oyz)) = |x_o|$

V. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Cho 2 mặt phẳng α, α' lần lượt có vtpt là $\vec{n}$ = (A,B,C), $\vec{n'}$ = (A',B',C')

Góc giữa α và α' cho bởi:

$$\cos(\alpha, \alpha') = |\cos(\vec{n}, \vec{n'})| = \frac{|\vec{n}\vec{n'}|}{|\vec{n}||\vec{n'}|} = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

Cần nhớ:

1) Nếu mặt phẳng α qua 3 điểm A,B,C thì $\vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$

2) Nếu mặt phẳng α' // mặt phẳng α : Ax + By + Cz + D = 0 thì: α': Ax + By + Cz + D' = 0 (D' $\neq$ D, D' chưa biết)

3) Nếu mặt phẳng α có 1 vtpt là $\vec{n}$ = (A,B,C) thì:

α : Ax + By + Cz + D = 0 (D chưa biết)

4) Cho mặt phẳng mp α : Ax + By + Cz + D = 0. Đặt f(x,y,z) = Ax + By + Cz + D

Ta có :

$f(x_M,y_M,z_M).\ f(x_N,y_N,z_N) > 0 \Leftrightarrow$ M và N nằm cùng phía đối với mặt phẳng α .

$f(x_M,y_M,z_M).\ f(x_N,y_N,z_N) < 0 \Leftrightarrow$ M và N nằm khác phía đối với mặt phẳng α .

BÀI TẬP

Bài 1: Cho 2 mặt phẳng :α: 2x-my+3z-6+m=0; α': (m+3)x – 2y + (5m+1)z – 10 = 0

Tìm m để:

a/ α trùng α'

b/ α cắt α'

c/ α vuông góc α'

Giải:

a/ α trùng α' ⇔ $\frac{2}{m+3} = \frac{-m}{-2} = \frac{3}{5m+1} = \frac{-6+m}{-10}$ ⇔ m=1

b/ $\overrightarrow{n_\alpha}$ = (2, -m, 3), $\overrightarrow{n_{\alpha'}}$ = (m+3, -2, 5m+1)

=> $[\overrightarrow{n_{\alpha}}, \overrightarrow{n_{\alpha'}}]$ = $(-5m^2 - m + 6, -7m+7, m^2 + 3m -4)$

Ta có:

α cắt α' ⇔ $[\overrightarrow{n_{\alpha}}, \overrightarrow{n_{\alpha'}}] \neq \vec{0}$ ⇔ $\left[\begin{array}{l} -5m^2 - m + 6 \neq 0 \\ -7m + 7 \neq 0 \\ m^2 + 3m - 4 \neq 0 \end{array}\right.$ ⇔ $m \neq 1$

c/ Ta có:

α ⊥ α' ⇔ $\overrightarrow{n_{\alpha}}, \overrightarrow{n_{\alpha'}}$ = 0 ⇔ 2(m + 3) + (-m)(-2) + 3(5m + 1) = 0

⇔ $m = -\frac{9}{19}$

Bài 2: Viết phương trình mặt phẳng:

a/ Đi qua 3 điểm A(2, 0, -1), B(1, -2, 3), C (0, 1, 2)

b/ Đi qua 2 điểm A(1, 1, -1), B(5, 2, 1) và song song trục Oz

c/ Đi qua 2 điểm A(1, 1, -1), B(5, 2, 1) và vuông góc mặt phẳng β: -x + z + 10 = 0

d/ Đi qua trục Ox và điểm N (3, -1, 2)

e/ Đi qua điểm M (2, -1, 4) và song song mpα: 3x – y +2z = 0

Giải:

a/ Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm.

$\overrightarrow{n_p} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ = (-10, -5, -5) = -5(2, 1, 1)

=> $(P): 2(x-2) + y + 1(z+1) = 0$ ⇔ 2x + y+ z – 3 = 0

b/ Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm.

Oz có vtcp $\vec{k} = (0, 0, 1)$, $\overrightarrow{AB} = (4, 1, 2)$

$\vec{n}_Q = [\overrightarrow{AB}, \vec{k}] = (1, -4, 0)$

$\Rightarrow (Q): 1(x-1) - 4(y-1) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 3 = 0$

c/ Gọi (R) là mặt phẳng cần tìm.

$\overrightarrow{n_\beta} = (-1, 0, 1)$

$\overrightarrow{n_R} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_\beta}] = (1, -6, 1)$

$\Rightarrow (R): 1(x-1) - 6(y-1) + 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - 6y + z + 6 = 0$

d/ Gọi (T) là mặt phẳng cần tìm.

$\overrightarrow{a_{ox}} = \vec{i} = (1, 0, 0)$

$\overrightarrow{n_T} = [\overrightarrow{ON}, \vec{i}] = (0, 2, 1)$ => (T): $2y + z = 0$

e/ Gọi (S) là mặt phẳng cần tìm.

$(S) // \alpha \Rightarrow \overrightarrow{n_s} = \overrightarrow{n_\alpha} = (3, -1, 2)$

$\Rightarrow (S): 3(x-2) - 1(y+1) + 2(z-4) = 0 \Leftrightarrow 3x - y + 2z - 15 = 0$

Cách khác

$(S) // \alpha \Rightarrow (S): 3x - y + 2z + D = 0 \quad (D \neq 0)$

$M \in (S) \Rightarrow 6 + 1 + 8 + D = 0 \Leftrightarrow D = -15$

$\Rightarrow (S): 3x - y + 2z - 15 = 0$

Bài 3: Viết phương trình mặt phẳng (P) qua điểm M(2, -1, -5) và vuông góc với 2 mặt phẳng:

$\alpha: x + 3y - z = 0$, $\beta: 2x + y - 4z - 8 = 0$

Giải:

$\overrightarrow{n_\alpha} = (1, 3, -1)$, $\overrightarrow{n_\beta} = (2, 1, -4) \Rightarrow \overrightarrow{n_p} = [\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}] = (-11, 2, -5)$

$\Rightarrow (P): -11(x-2) + 2(y+1) - 5(z+5) = 0 \Leftrightarrow -11x + 2y - 5z - 1 = 0$

Baøi 4: Viết phương trình mặt phẳng α qua điểm M(4, -1, 1) và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho OA = 2OB = 3OC

Giải:

Gọi A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c) (a,b,c > 0)

$\Rightarrow \alpha: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$M \in \alpha \Rightarrow \frac{4}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad (1)$

$OA = 2OB = 3OC \Rightarrow a = 2b = 3c \Rightarrow b = \frac{a}{2}, c = \frac{a}{3}$

Thay vào (1):

$\frac{4}{a} - \frac{2}{a} + \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = 5, b = \frac{5}{2}, c = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow \alpha: \frac{x}{5} + \frac{2y}{5} + \frac{3z}{5} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 5 = 0$

Bài 5: Cho 2 mặt phẳng:

α: $2x - y + 2z - 4 = 0$; β: $-4x + 2y - 4z + 9 = 0$

a/ Chứng minh rằng $\alpha // \beta$. Tính khoảng cách giữa α và β

b/ Viết phương trình mặt phẳng (P) cách đều α và β

Giải:

a/ Ta có: $\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{-4}{9} \Rightarrow \alpha // \beta$

Lấy $A(0, -4, 0) \in \alpha$

$d(\alpha, \beta) = d(A, \beta) = \frac{|-8+9|}{\sqrt{16+4+16}} = \frac{1}{6}$

b/ Ta có:

$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow d(M, \alpha) = d(M, \beta)$

$$\Leftrightarrow \frac{|2x-y+2z-4|}{3} = \frac{|-4x+2y-4z+9|}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - y + 2z - 4 = -2x + y - 2z + \frac{9}{2} \\ 2x - y + 2z - 4 = 2x - y + 2z - \frac{9}{2} \quad (loại) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2x - y + 2z - \frac{17}{4} = 0$$

Bài 6: Tìm điểm $M \in Oz$ biết:

a/ M cách đều điểm A (2, 3, 4) và mp (P): $2x + 3y + z - 17 = 0$

b/ M cách đều 2 mặt phẳng α: $x + y - z + 1 = 0$ và β: $x - y + z + 5 = 0$

Giải: $M \in Oz \Rightarrow M(0, 0, z)$

a/ Ta có: MA = d(M, (P)) ⇔ $\sqrt{4+9+(z-4)^2} = \frac{|z-17|}{\sqrt{14}}$

$$\Leftrightarrow 13 + (z-4)^2 = \frac{(z-17)^2}{\sqrt{14}}$$

$$\Leftrightarrow 13z^2 - 78z + 117 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 3$$

Vậy M(0, 0, 3)

b/ Ta có:

d(M, α) = d (M, β) ⇔ $\frac{|-z+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|z+5|}{\sqrt{3}}$

⇔ $\left[\begin{array}{l} -z+1 = z+5 \\ -z+1 = -z-5 \quad (loại) \end{array}\right.$ ⇔ z = -2

Vậy M(0, 0, -2)

Bài 7: Cho tam giác ABC có A(3, -1, 4), B (2, 1, -2), C(1, -3, 5)

Gọi A', B', C' lần lượt là điểm đối xứng của A, B,C lần lượt qua Ox, Oy, Oz. Tính khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác $A'B'C'$ đến mặt phẳng (OAB).

Giải:

Ta có: A' (3, 1, -4), B' $(-2, 1, 2)$, C' (-1, 3, 5)

=>trọng tâm G(0, $\frac{5}{3}$, 1); $\vec{n}_{OAB} = \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right]$ = (-2, 14, 5)

=> (OAB): -2x + 14y +5z = 0 =>d (G,(OAB)) = $\frac{17}{9}$

Bài 8: Cho 2 điểm A(0, 0, -3), B(2, 0, -1) và mp (P): 3x – 8y + 7z – 1 = 0

Tìm tọa độ điểm C ∈ (P) sao cho ΔABC đều.

Giải:

Gọi C (x, y, z). Ta có:

$$\begin{cases} AC = AB \\ AC = BC \\ C \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC^2 - AB^2 \\ AC^2 = BC^2 \\ C \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ x^2 + y^2 + (z+3)^2 = (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 & (1) \\ x + z + 1 = 0 & (2) \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) và (3) => z = -x – 1, y = $\frac{-x-2}{2}$

Thay vào (1) :

$x^2 + \frac{(x+2)^2}{4}(x-2)^2 = 8 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = -2, z = -3 \\ x = \frac{-2}{3} \Rightarrow y = \frac{-2}{3}, z = \frac{-1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm C: C(2, -2, -3) và C($\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}$)

Bài 9: Viết phương trình mặt phẳng (P) qua 2 điểm A(3, 0, 0), C(0, 0, 1) thỏa điều kiện

a/ (P) cắt Oy tại điểm B sao cho ΔABC có diện tích bằng $\frac{7}{2}$

b/ (P) tạo với mặt phẳng (Oxy) góc 30^o.

Giải:

a/ B $\in$ Oy => B(0, b, 0)

Nếu b = 0 => B trùng O => $S_{ABC} = \frac{3}{2}$ (trái giả thiết). Vậy $b \neq 0$

=>(P): $\frac{x}{3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{1} = 1$

Ta có: $\overrightarrow{AB}$ = (-3, b, 0), $\overrightarrow{AC}$ = (-3, 0, 1) => $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ = (b, 3, 3b)

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{10b^2 + 9}$

Do ó : $S_{ABC} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{10b^2 + 9} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow b = \pm 2$

$\Rightarrow$ (P): $\frac{x}{3} \pm \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$

b/ Gọi B =(P) ∩ Oy => B(0, b, 0) (b≠0; vì nếu b = 0 thì (P)≡(Oxz) => (P) ⊥ (Oxy))

=> $(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{1} = 1$ ⇔ bx + 3y + 3bz – 3b = 0

$\vec{n}_p$ = (b, 3, 3b): (Oxy) có vtpt $\vec{k}$ = (0, 0, 1)

Ta có:

$$\cos((P),(Oxy)) = \cos 30^o \Leftrightarrow \frac{|\vec{n_p}.\vec{k}|}{|\vec{n}p|.|\vec{k}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|3b|}{\sqrt{b^2+9+9b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow b = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

=>(P): $\frac{x}{3} \pm \frac{\sqrt{2}y}{3} + \frac{z}{1} = 1$

Bài 10: Cho 2 điểm A(2, 0, 0), B(0, 1, 1) và mặt phẳng α: 2x – y + 2z + 9 = 0

Tìm điểm C ∈ Oz sao cho mặt phẳng (ABC) tạo với mặt phẳng α góc 60^o.

Giải:

Ta có: C ∈ Oz => C(0, 0, m)

$\overrightarrow{AB}$ = (-2, 1, 1), $\overrightarrow{AC}$= (-2, 0, m)

=>mp(ABC) có vtpt $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ = (m, 2m – 2, 2)

$\vec{n}_\alpha$ = (2, -1, 2)

Ta có:

$$\left|\cos(\vec{n}, \overrightarrow{n_\alpha})\right| = \cos 60^o \Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{n_\alpha}.\vec{n}|}{|\vec{n}\alpha|.|\vec{n}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{m^2+(2m-2)^2+4}.3} = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow$ $5m^2 - 8m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{5}$

$C\left(0, 0, \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{5}\right)$

Bài 11: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ theo 1 đường tròn có bán kính bằng 3.

Giải:

(S) có tâm I(1, -2, -1), bán kính R = 3. (bằng bán kính đường tròn giao tuyến) suy ra (P) cắt (S) theo đường tròn lớn => (P) qua I

Ta có:

(P) chứa Ox => (P): $By + Cz = 0$ $(B^2 + C^2 \neq 0)$

$I \in (P) \Rightarrow -2B - C = 0 \Rightarrow C = -2B$

$\Rightarrow (P): By - 2Bz = 0 \Leftrightarrow y - 2z = 0$

Bài 12: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc trục Oy và tiếp xúc với 2 mặt phẳng:

α: $2x + y - 3z + 5 = 0$ và β: $2x + y - 3z - 11 = 0$

Giải:

Gọi I là tâm của (S)

$I \in Oy \Rightarrow I(0, m, 0)$

(S) tiếp xúc $\alpha, \beta \Leftrightarrow d(I, \alpha) = d(I, \beta) \Leftrightarrow \frac{|m+5|}{\sqrt{14}} = \frac{|m-11|}{\sqrt{14}}$

$\Leftrightarrow |m+5| = |m - 11| \Leftrightarrow m = 3 \Rightarrow I(0, 3, 0)$

(S) có bán kính: $R = d(I, \alpha) = \frac{8}{\sqrt{14}}$

$\Rightarrow (S): x^2 + (y-3)^2 + z^2 = \frac{32}{7}$

Bài 13: Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng (P): $2x - 3y + 6z - 3 = 0$

Viết phương trình mặt phẳng (Q) // (P) và tiếp xúc (S)

Giải:

(S) có tâm I(-2, 1, -3), bán kính R = 4

(Q) //(P) => (Q): $2x - 3y + 6z + D = 0$ $(D \neq -3)$

Ta có:

(Q) tiếp xúc (S) ⇔ d(I, (Q)) = R ⇔ $\frac{|D-25|}{7} = 4$

⇔ $\left[\begin{array}{l} D = -3 \ (loại) \\ D = 53 \end{array}\right.$

=>(Q): $2x - 3y + 6z + 53 = 0$

Bài 14: Cho 4 điểm A(1, 5, 3), B(4, 2, -5), C(5, 5, -1), D(1, 2, 4).

a/Viết phương trình mặt cầu (S_1) đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxz).

b/ Viết phương trình mặt cầu (S_2) đi qua 4 điểm A, B, C, D.

Giải:

a/ Gọi I là tâm của (S_1)

$I \in (Oxz)$ => I(a, 0, c)

⇨ (S_1): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2cz + d = 0$

Ta có:

$A \in (S_1)$ => $35 - 2a - 6c + d = 0$ (1)

$B \in (S_1)$=> $45 - 8a + 10c + d = 0$ (2)

$C \in (S_1)$ =>$51 - 10a + 2c + d = 0$ (3)

(1), (2), (3) cho: $a = \frac{11}{5}$, $c = \frac{1}{5}$, $d = -\frac{147}{5}$

$\Rightarrow (S_1)$: $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{22}{5}x - \frac{2}{5}z - \frac{147}{5} = 0$

b/ Pt (S_2) có dạng:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

$A \in (S_2) \Rightarrow 35 - 2a - 10b - 6c + d = 0$ (1)

$B \in (S_2) \Rightarrow 45 - 8a - 4b + 10c + d = 0$ (2)

$C \in (S_2) \Rightarrow 51 - 10a - 10b + 2c + d = 0$ (3)

$D \in (S_2) \Rightarrow 21 - 2a - 4b - 8c + d = 0$ (4)

(1), (2), (3), (4) cho: $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$, $d = -19$

$\Rightarrow (S_1)$: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 19 = 0$

Bài 15: Viết phương trình mặt cầu:

a/ có tâm I(-3, 2, 4) và tiếp xúc mặt phẳng (Oyz)

b/ có bán kính bằng 4, tiếp xúc mặt phẳng (Oxy) và có tâm nằm trên tia Oz

Giải:

a/ $R = d(I, (Oyz)) = 3$

=> Pt mặt cầu: $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 9$

b/ Gọi I là tâm của mặt cầu

$I \in$ tia Oz $\Rightarrow I(0, 0, c)$ $(c>0)$
$d(I, (Oxy)) = R \Leftrightarrow |c| = 4 \Leftrightarrow c = 4 \Rightarrow I(0, 0, 4)$
Pt mặt cầu:
$x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 16$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Viết phương trình mặt phẳng α biết mặt phẳng α:

a/ Đi qua 3 điểm A(3, 1, 0), B(2, 1, -1), C(4, -1, 5)
b/ Đi qua điểm M(-1, 2, 3) và vuông góc đường thẳng AB với A(4, 1, 1), B(5, -1, 3)

c/ Đi qua điểm M(2, -2, 1) và song song mặt phẳng β: $2x + y - 3z - 10 = 0$

d/ Đi qua trục Oy và điểm M(-1, 6, 4)

e/ Đi qua 2 điểm A(1, 2, 1), B(4, 3, -1) và song song trục Oz

Bài 2: Viết phương trình mặt phẳng (P) biết:

a/ (P) qua 2 điểm A(-1, 1, 4), B(2, 0, 3) và vuông góc mặt phẳng (Q): $x - y + 2z - 3 = 0$

b/ (P) qua điểm M(3, -1, -5) và vuông góc với 2 mặt phẳng

$3x - 2y + 2z + 7 = 0$, $5x - 4y + 3z + 1 = 0$

c/ (P) nhận điểm N(2, 1, -3) là hình chiếu của gốc O trên (P)

Bài 3: Tìm a và b để 2 mặt phẳng sau song song:

$$2x + ay + 2z + 3 = 0 \text{ và } bx + 2y - 4z + 7 = 0$$

Bài 4: Tìm m để 2 mặt phẳng sau cắt nhau

$$2x - my + 3z - 6 + m = 0 \text{ và } (m + 3)x - 2y + (5m + 1)z - 10 = 0$$

Bài 5: Tìm a để 4 điểm A(1, 2, 1), B(2, a, 0), C(4, -2, 5), D(6, 6, 6) thuộc cùng 1 mặt phẳng

Bài 6: Tìm điểm M thuộc trục Ox cách đều điểm A(1, 1, -1) và mặt phẳng (P): $x - y - z - 5 = 0$

Bài 7: Cho 2 mặt phẳng α: $x + 2y - z + 3 = 0$, β: $3x - y + z - 5 = 0$

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua giao tuyến của α, β và:

a/ qua điểm M(3, 0, 1)

b/ song song trục Oy

c/ vuông góc mặt phẳng (Q): $x - y - 3z + 6 = 0$

d/ cắt trục Ox tại điểm N sao cho ON = 1

Bài 8: Viết phương trình mặt phẳng đi qua 2 điểm M(0, 2, 0), N(2, 0, 0) và hợp với mặt phẳng (Oyz) góc 60^o

Bài 9: Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc trục Oz và tiếp xúc với 2 mặt phẳng:

$$2x + y - 3z - 1 = 0, \qquad x - 2y + 3z + 5 = 0$$

Bài 10: (ĐH 08B)

Cho 3 điểm A(0,1, 2), B(2, -2, 1), C(-2, 0, 1)

a/ Viết phương trình mặt phẳng (ABC)

b/ Tìm tọa độ điểm M $\in$ mặt phẳng (P): 2x + 2y + z – 3 = 0 sao cho MA = MB = MC.

Bài 11: (ĐH.10B)

Cho 3 điểm A(1, 0, 0), B(0, b, 0), C (0, 0, c) (b>0, c>0) và mặt phẳng (P): y – z + 1 = 0. Xác định b, c biết (ABC) vuông góc (P) và khoảng cách từ gốc 0 đến (ABC) bằng $\frac{1}{3}$

Bài 12: (ĐH.10D)

Cho 2 mặt phẳng (P): x + y + z – 3 = 0, (Q): x – y + z – 1 = 0

Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ gốc O đến (R) bằng 2

Bài 13: (ĐH.08D)

Cho 4 điểm A(3, 3, 0), B(3, 0, 3), C(0, 3, 3),D(3, 3, 3)

a/ Viết phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D.

b/ Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 14: (ĐH.09A)

Cho mặt phẳng (P):2x – 2y – z – 4 = 0 và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 – 2x – 4y – 6z – 11=0$. Chứng minh rằng (P) cắt (S) theo 1 đường tròn. Xác định tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn.

Bài 15: (ĐH.09B)

Cho tứ diện ABCD có A(1, 2, 1), B(-2, 1, 3), C(2, -1, 1),D(0, 3, 1).

Viết phương trình mặt phẳng (P) Xi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P)